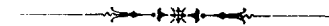


Fürst B. Galitzin.

ÜBER EINE ABÄNDERUNG

DES

ZÖLLNER'SCHEN HORIZONTALPENDELS.



et 23/8

ST. PETERSBURG.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Wass. Ostr., 9 Linie, № 12.

1906.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Februar 1906. S. v. Oldenburg, Beständiger Sekretär.

Ueber eine Abänderung des Zöllner'schen Horizontalpendels.

VON FÜRST B. GALITZIN.

Die bei seismometrischen Beobachtungen hauptsächlich in Russland sehr verbreiteten Horizontalpendel von Bosch (aus Strassburg i. E.) stützen sich bekanntlich auf einen Stift und sind nur von einem, resp. einem Paar Drähte, die fast zu demselben Punkt am Pendelarm gehen, getragen. Diese Art Pendel mit Stützpunkt bietet den grossen Vortheil, dass bei ihnen alle Längsschwingungen in der Richtung des Pendelarms total vermieden werden, ein Umstand, der bei Verwerthung der Seismogramme von sehr grosser Bedeutung sein kann. Aber andererseits kommt diesen Pendeln der grosse Nachtheil zu, dass der Druck auf die Spitze des Stützstiftes im Allgemeinen sehr gross ist. Dabei büsst die Empfindlichkeit der Horizontalpendel als Seismographen sehr viel ein, und ausserdem wird durch einen solchen grossen Druck die Spitze selbst bald abgestumpft. Dies vermindert noch weiter die Empfindlichkeit des Apparates, wobei noch die Ruhelage des Pendels mit der Zeit bedeutende Veränderungen erfahren kann. Alle diese Umstände erschweren ganz erheblich die Ausführung von planmässigen Beobachtungen mit den Bosch'schen Horizontalpendeln.

Bei den Ehlert'schen sehr leichten Horizontalpendeln, die sogar auf zwei Stiften ruhen und keinen tragenden Draht haben, tritt dieser Uebelstand, wegen des leichten Gewichts, nicht so sehr zum Vorschein; bei den Bosch'schen Pendeln aber, wo das Pendelgewicht im Allgemeinen ein recht beträchtliches ist, ist die früher erwähnte Abstumpfung der Spitze sehr zu befürchten.

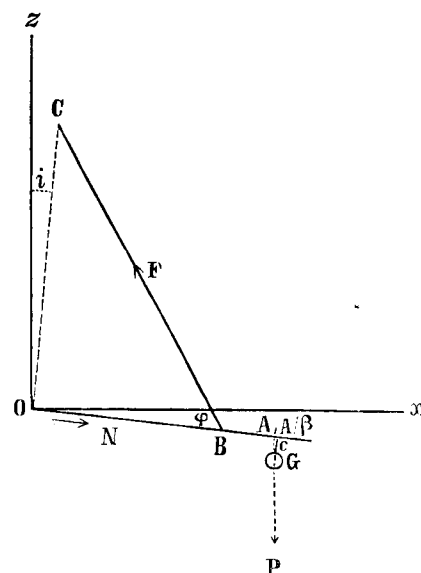
Wollen wir nun den Druck auf die Stützspitze bei einem solchen Pendel ausrechnen.

Die schematische Zeichnung des Bosch'schen Horizontalpendels ist in der Fig. 1 gegeben.

Der Anfangspunkt der Coordinaten O falle mit dem unteren Stützpunkt des Pendels zusammen. Oz sei die verticale und Ox die horizontale Coordinatenaxe.

OA ist der Pendelarm, welcher den Winkel β mit der Horizontalaxe bilden möge. Der Schwerpunkt des Pendels befinde sich in G in einer Entfernung $AG = c$ vom Pendelarm; c ist gewöhnlich sehr klein.

Fig. 1.



Der Aufhangedraht BC des Pendels bilde nun den Winkel φ mit dem Pendelarm und habe seinen oberen Befestigungspunkt in C . Somit ist OC die Drehungsaxe des Pendels, welche den Winkel i mit der Verticalen bildet.

Bezeichnen wir nun das Gewicht des Pendels durch P , die Spannung des Aufhangedrahts durch F und den Druck auf den unteren Stützpunkt durch N .

Sei noch $OA = a$ und $OB = b$, und wollen wir nun F und N berechnen.

Projiziert man die Kräfte P und F auf die Richtung des Pendelarms, so erhält man sofort die Beziehung

$$N = F \cos \varphi - P \sin \beta. \dots \dots \dots (1)$$

Die Bedingung, dass die Momente dieser Kräfte in Bezug auf O sich beim Gleichgewicht genau aufheben müssen, liefert die Beziehung

$$P \cos \beta (a - c \operatorname{tg} \beta) = F \sin \varphi \cdot b. \dots \dots \dots (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich sofort

$$F = \frac{P}{\sin \varphi} \cdot \cos \beta \frac{a - c \operatorname{tg} \beta}{b} \dots \dots \dots (3)$$

$$N = P \left(\frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{a - c \operatorname{tg} \beta}{b} - \sin \beta \right). \dots \dots \dots (4)$$

β und c sind gewöhnlich sehr klein; ist noch $a = b$, was bei dem Bosch'schen Pendel eben etwa zutrifft, so hat man mit genügender Genauigkeit

$$F = \frac{P}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (5)$$

$$N = \frac{P}{\operatorname{tg} \varphi} \dots \dots \dots (6)$$

Für $\varphi = 45^\circ$ würde $N = P$ sein.

Bei dem mir zur Verfügung stehenden Bosch'schen Pendel war $P = 3826$ Gr. und $\frac{a}{b}$ ungefähr gleich 1. Dieses Pendel wurde auf eine grosse totale (doppelte) Periode von $30,4$ eingestellt und zwar so, dass $\beta = 0$ war.

Dabei betrug der Winkel

$$\varphi = 60^\circ.$$

Daraus ergibt sich nach der Formel (4)

$$N = 0,58 P,$$

oder

$$N = 2219 \text{ Gr.},$$

also mehr als 2 Kilogramm.

Wir sehen also, dass bei den Bosch'schen Pendeln mit schwerem Pendelgewicht der Druck auf den unteren Stützpunkt unter Umständen sehr beträchtlich sein kann; folglich sind eine Abstumpfung der Pendelspitze und alle diese Abstumpfung begleitenden unangenehmen Erscheinungen sehr zu befürchten.

Im Gegensatz zu den Horizontalpendeln mit unterem Stützpunkt werden in der praktischen Seismometrie öfters die Zöllner'schen Horizontalpendel benutzt.

Diese Art Pendel hat bekanntlich den grossen Vortheil, dass sie keinen festen Stützpunkt besitzen, sondern von zwei Drähten, von denen der eine nach oben und der andere nach unten geht, getragen werden. Diese Pendel hängen ganz frei, folglich kann von einer Abstumpfung der Spitze nicht mehr die Rede sein und die Empfindlichkeit des Apparates muss unverändert bleiben.

Nun aber kommt bei solchen frei hängenden Horizontalpendeln ein erheblicher Nachtheil zum Vorschein. Bei ihnen können nämlich bei Erschütterungen Längsschwingungen in der Richtung des Pendelarms stattfinden, welche unter Umständen sehr störend wirken können. In meinem

früheren Aufsatz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen»¹⁾ im § 20 habe ich die Bewegung eines solchen Zöllner'schen Horizontalpendels auf meiner Untersuchungsplattform experimentell verfolgt. Die dort angeführten Curven zeigen in der That sehr deutlich, wie störend diese Längsschwingungen des Pendels sein können.

Auch bei wirklichen Erderschütterungen können solche Längsschwingungen des Zöllner'schen Horizontalpendels zum Vorschein kommen, wie es auch Prof. Lewitzky wirklich auf der Erdbebenstation zu Juriew (Dorpat) beobachtet hat.

Es fragt sich nun, ob es nicht möglich wäre das Zöllner'sche Horizontalpendel so abzuändern, dass seine Längsschwingungen ganz fortfallen, aber ohne dass dabei die Nachteile des Bosch'schen Pendels eintreten.

Dies lässt sich in der That erreichen.

Denken wir uns in dem Schnittpunkt der Drehungsaxe eines Zöllner'schen Horizontalpendels mit dem Pendelarm eine kleine Platte senkrecht zum Pendelarm befestigt. Auf diese Platte möge nun eine kleine Spitze drücken, welche unabhängig von dem beweglichen Theil des Pendels sein soll und mittelst einer Schraube und Mutter hin und her fortbewegt werden kann.

Bringt man die Spitze nur in leise Berührung mit der Platte, so wird der Druck N auf diese Spitze gleich Null sein. Verschiebt man nun dieselbe durch Drehung der Schraube um ein kleines Stück ϵ in der passenden Richtung, so wird dadurch das Pendel um ein kleines Stück in der Richtung des Pendelarmes verstellt. Das Pendel erhält dadurch einen festen Ruhepunkt auf dem Pendelarm, wodurch die störenden Längsschwingungen des Apparates total eliminiert werden, was auch bei sehr kleinen Werthen von ϵ stattfindet, wenn die Erschütterungen nicht zu gross sind. Was nun den Druck N auf die Spitze anbelangt, so wird derselbe für kleine Werthe von ϵ ebenfalls sehr klein sein, da für $\epsilon = 0$ auch $N = 0$ wird.

Ein solches abgeändertes Zöllner'sches Horizontalpendel müsste also die Vortheile des Bosch'schen Pendels ohne die Nachteile desselben besitzen, da eben der Druck auf die Stützs Spitze sehr klein wird.

Es wäre dabei freilich eines zu befürchten, dass nämlich durch eine solche Verstellung des Pendelarmes die Empfindlichkeit sehr viel einbüßen wird. Diese Befürchtung haben aber dazu vorgenommene directe Versuche nicht bestätigt; selbst bei einer Verschiebung von ϵ um 3 mm blieb die

¹⁾ Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. I. Livraison 3 1904).

Empfindlichkeit des Apparats fast unverändert, wie wir es weiter unten sehen werden.

Wollen wir nun den Druck N auf eine solche Spitze einer genaueren Berechnung unterziehen.

Die schematische Zeichnung des Zöllner'schen Horizontalpendels ist in der Figur 2 gegeben.

Oz und Ox bezeichnen resp. die verticale und die horizontale Coordinatenaxe. BH ist der Pendelarm, welcher den Winkel β mit der horizontalen Axe bildet. Der Schwerpunkt des Pendels befindet sich in G , in der Entfernung $c = HG$ von dem Pendelarm, wo c gewöhnlich klein ist.

OB und AC sind die Drähte, die das Pendel tragen; O und A sind die beiden festen Befestigungspunkte der Drähte, somit wird die Linie OA die eigentliche Drehungsaxe des Pendels bei normaler Lage desselben sein. Diese Axe bilde den Winkel i mit der Verticalen. Die Längen und Spannungen der Drähte seien resp. l_1 , l_2 , F_1 und F_2 , und das Gewicht des Pendels P .

O_1 ist der Schnittpunkt der Drehungsaxe mit dem Arm des Pendels bei normaler Lage desselben, d. h. bei Abwesenheit irgend welches Stützpunktes.

Die Winkel γ , δ , φ und ψ sind in der Figur notiert.

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$OD = h$$

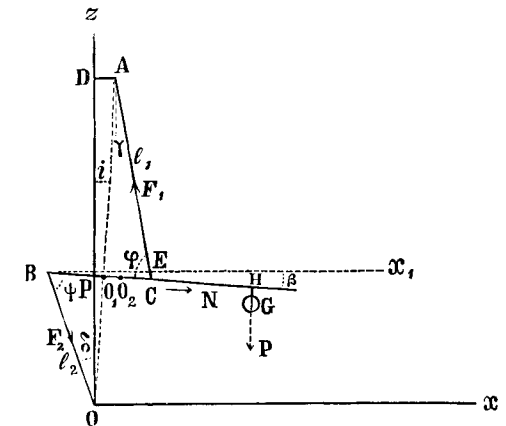
$$BC = d$$

$$CH = m$$

$$CE = e.$$

Die ersten drei von diesen Grössen, so wie auch l_1 und l_2 , sind unveränderlich, während die Winkel β , γ , δ , φ und ψ von der Lage des Pendelarmes in der Ebene zOx , in welcher das Pendel Schwingungen ausführen kann, abhängig sind.

Fig. 2.



Wollen wir nun die Beziehungen zwischen allen diesen Grössen aufsuchen.

Aus der Figur 2 ergibt sich ohne Weiteres:

$$\left. \begin{aligned} d \sin \beta &= e \sin (\varphi + \beta) \\ (l_1 - e) \cos \gamma + l_2 \cos \delta &= h \\ O_1 B + O_1 C &= d. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

Aus den Dreiecken OBO_1 und CAO_1 folgt

$$\frac{O_1 B}{l_2} = \frac{\sin (\delta + i)}{\sin (\psi + \delta + i)}$$

$$\frac{O_1 C}{l_1} = \frac{\sin (\gamma + i)}{\sin (\varphi + \gamma + i)}.$$

Nun ist

$$\left. \begin{aligned} \psi + \beta + \delta &= 90^\circ \\ \varphi + \beta + \gamma &= 90^\circ, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

also

$$\psi + \delta + i = 90^\circ - (\beta - i)$$

$$\varphi + \gamma + i = 90^\circ - (\beta - i)$$

und

$$O_1 B = l_2 \frac{\sin (\delta + i)}{\cos (\beta - i)}$$

$$O_1 C = l_1 \frac{\sin (\gamma + i)}{\cos (\beta - i)}.$$

β und i sind immer äusserst klein, folglich können wir mit genügender Genauigkeit setzen

$$\left. \begin{aligned} O_1 B &= l_2 \sin (\delta + i) \\ O_1 C &= l_1 \sin (\gamma + i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Auf Grund dieser Gleichungen, der zweiten der Gleichungen (8) und der Formeln (7) ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit, bis auf Glieder höherer Ordnung in Bezug auf i und β ,

$$e = d \frac{\beta}{\cos \gamma}$$

und

$$l_1 \cos \gamma + l_2 \cos \delta = h + \beta d \dots\dots\dots (10)$$

$$l_1 \sin \gamma + l_2 \sin \delta = d - i h \dots\dots\dots (11)$$

Die Gleichungen (10) und (11) behalten ihre Gültigkeit bei jeder Lage des Pendelarms in der Ebene zOx .

Wollen wir nun den Winkel β bei normaler Lage des Pendels im Gleichgewicht aufsuchen.

Dazu müssen wir die Gleichgewichtsbedingungen für die wirkenden Kräfte hinschreiben.

Dieselben lauten

$$F_1 \cos \gamma = P + F_2 \cos \delta \dots\dots\dots (12)$$

$$F_1 \cos \varphi = P \beta + F_2 \cos \psi$$

und

$$P(m - c\beta) = F_2 \sin \psi \cdot d,$$

oder, mit Berücksichtigung der Beziehungen (8),

$$F_1 [\beta \cos \gamma + \sin \gamma] = P \beta + F_2 [\beta \cos \delta + \sin \delta] \dots\dots (13)$$

$$P(m - c\beta) = F_2 d [\cos \delta - \beta \sin \delta]. \dots\dots\dots (14)$$

Eliminiert man F_1 aus den Gleichungen (12) und (13), so wird

$$F_2 = P \frac{\sin \gamma}{\sin (\delta - \gamma)}.$$

Setzt man nun diesen Werth von F_2 in die Gleichung (14) ein, so ergibt sich ohne Schwierigkeit nach passenden Transformationen

$$\beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \frac{m}{d} \{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma\}}{\operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta - \frac{c}{d} \{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma\}} \dots\dots\dots (15)$$

Dies ist der Ausdruck für β bei normaler Lage des Pendels, d. h. bei Abwesenheit irgend welches Stützpunktes.

Denken wir uns nun, dass in O_1 eine kleine Platte befestigt ist, auf welche ein beweglicher Stift drückt, und dieser Stift sei so weit verschoben, dass O_1 sich nach O_2 verlegt. Dabei soll die Verschiebung $O_1 O_2 = \epsilon$ immer sehr klein bleiben. Durch diese Verschiebung erfahren die Winkel β , γ , δ , φ und ψ eine entsprechende Veränderung und es tritt ein bestimmter Druck N auf die Spitze dieses Stiftes auf.

Diesen Druck N wollen wir eben berechnen.

Wollen wir dabei allen neuen Winkeln den Index 1 beilegen.

Wenn O_1 sich nach O_2 verlegt, so nähert sich B um denselben Betrag an P .

Bezeichnen wir BP durch s , so ist (siehe die erste der Formeln (8))

$$s = l_2 \frac{\sin \delta}{\cos \beta} \dots \dots \dots (16)$$

Daraus folgt, da β immer sehr klein ist,

$$\partial s = l_2 \cos \delta \cdot \partial \delta + l_2 \beta \sin \delta \cdot \partial \beta$$

oder, da $-\partial s = \varepsilon$ ist,

$$\partial \delta = - \frac{\varepsilon + l_2 \beta \sin \delta \cdot \partial \beta}{l_2 \cos \delta}.$$

Aus dieser Formel und der Gleichung (11) ergibt sich weiter

$$\partial \gamma = \frac{\varepsilon + l_2 \beta \sin \delta \cdot \partial \beta}{l_1 \cos \gamma}$$

und aus der Gleichung (10) noch

$$\partial \beta = \frac{\varepsilon}{d} [\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma] \left[1 + \frac{l_2}{d} \cdot \beta \sin \delta (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right] \dots (17)$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung erhält man folgende definitive Ausdrücke für $\partial \gamma$ und $\partial \delta$:

$$\partial \gamma = \frac{\varepsilon}{l_1 \cos \gamma} \left[1 + \beta \frac{l_2}{d} \sin \delta (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right] \dots \dots \dots (18)$$

$$\partial \delta = - \frac{\varepsilon}{l_2 \cos \delta} \left[1 + \beta \frac{l_2}{d} \sin \delta (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right] \dots \dots \dots (19)$$

Wollen wir nun die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen bei verschobenem Pendelarm.

Dieselben lauten:

$$F_1 \cos \gamma_1 = P + F_2 \cos \delta_1 + N \beta_1 \quad ^2) \dots \dots \dots (20)$$

$$F_1 \cos \varphi_1 = P \beta_1 + F_2 \cos \psi_1 + N,$$

oder, mit Rücksicht auf die Beziehungen (8),

$$F_1 [\sin \gamma_1 + \beta_1 \cos \gamma_1] = P \beta_1 + F_2 [\sin \delta_1 + \beta_1 \cos \delta_1] + N \dots (21)$$

¹⁾ Der aus der Formel (15) sich ergebende Werth von β entspricht nur dem Fall, wo das Pendel vollkommen frei ist.

²⁾ F_1 und F_2 ändern ebenfalls ihren Werth, aber wir werden dieselben Bezeichnungen beibehalten.

Setzen wir $s + PO_1 = s_1$ (siehe die Fig. 2), so liefert die Bedingung der Gleichheit der Momente in Bezug auf den festen Stützpunkt die folgende Beziehung:

$$F_1 \sin \varphi_1 (d - s_1) + F_2 \sin \psi_1 s_1 = P (m + d - s_1 - c \beta_1),$$

oder, mit Rücksicht auf dieselben Beziehungen (8),

$$\left. \begin{aligned} & F_1 [\cos \gamma_1 - \beta_1 \sin \gamma_1] (d - s_1) + \\ & + F_2 [\cos \delta_1 - \beta_1 \sin \delta_1] s_1 = P (m + d - s_1 - c \beta_1). \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

Um N zu bestimmen, muss man nun F_1 und F_2 aus den Gleichungen (20), (21) und (22) eliminieren.

Aus der Gleichung (20) erhält man

$$F_1 = \frac{1}{\cos \gamma_1} \{ P + F_2 \cos \delta_1 + N \beta_1 \} \dots \dots \dots (23)$$

Setzt man diesen Werth von F_1 in die Gleichung (21) ein, so ergibt sich

$$F_2 = \frac{1}{\sin (\delta_1 - \gamma_1)} [P \sin \gamma_1 - N \{ \cos \gamma_1 - \beta_1 \sin \gamma_1 \}] \dots \dots (24)$$

Ersetzt man nun F_2 durch diesen seinen Werth in der Gleichung (23), so folgt

$$F_1 = \frac{1}{\sin (\delta_1 - \gamma_1)} [P \sin \delta_1 - N \{ \cos \delta_1 - \beta_1 \sin \delta_1 \}] \dots \dots (25)$$

Setzt man nun diese Werthe von F_1 und F_2 aus den Gleichungen (25) und (24) in die Gleichung (22) ein, so ergibt sich nach passenden Reductionen folgender Ausdruck für N :

$$N = P \frac{\operatorname{tg} \gamma_1 - \beta_1 \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 - \frac{m - c \beta_1}{d} \{ \operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \gamma_1 \}}{1 - \beta_1 \{ \operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \gamma_1 \}} \dots \dots \dots (26)$$

Nun ist aber

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \partial \gamma$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{\cos^2 \delta} \partial \delta$$

$$\beta_1 = \beta + \partial \beta,$$

wo γ , δ und β die Winkel bei normaler Lage des Pendels bedeuten, bei Abwesenheit irgend welches Stützpunktes.

Setzt man diese Werthe in die Formel (26) ein, so wird

$$N = P \frac{\left[\operatorname{tg} \gamma - \beta \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta - \frac{m-c\beta}{d} (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right] + \left\{ 1 + \frac{m-c\beta}{d} - \beta \operatorname{tg} \delta \right\} \frac{\partial \gamma}{\cos^2 \gamma} - \left\{ \frac{m-c\beta}{d} + \beta \operatorname{tg} \gamma \right\} \frac{\partial \delta}{\cos^2 \delta} + \left\{ \frac{c}{d} (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \right\} \cdot \partial \beta}{1 - \beta \{ \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \gamma \} - \frac{\beta}{\cos^2 \gamma} \partial \gamma - \frac{\beta}{\cos^2 \delta} \partial \delta - \{ \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \gamma \} \partial \beta}.$$

Nun ist das in den eckigen Klammern des Zählers dieses Ausdruckes stehende Glied nach der Formel (15) gleich Null. Daraus folgt

$$N = P \frac{\left\{ 1 + \frac{m-c\beta}{d} - \beta \operatorname{tg} \delta \right\} \frac{\partial \gamma}{\cos^2 \gamma} - \left\{ \frac{m-c\beta}{d} + \beta \operatorname{tg} \gamma \right\} \frac{\partial \delta}{\cos^2 \delta} + \left\{ \frac{c}{d} (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \right\} \partial \beta}{1 - \beta \{ \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \gamma \}}.$$

Setzt man in diese Formel die Werthe von $\partial \beta$, $\partial \gamma$ und $\partial \delta$ aus den Formeln (17), (18) und (19) ein, so ergibt sich folgender definitiver allgemeiner Ausdruck für N :

$$N = \frac{\epsilon P}{1 - \beta \{ \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \gamma \}} \left[\left\{ 1 + \frac{m}{d} - \beta \left(\frac{c}{d} + \operatorname{tg} \delta - \left(1 + \frac{m}{d} \right) \frac{l_2}{d} \cdot \sin \delta (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right) \right\} \frac{1}{l_1 \cos^3 \gamma} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{m}{d} - \beta \left(\frac{c}{d} - \operatorname{tg} \gamma - \frac{m}{d} \cdot \frac{l_2}{d} \cdot \sin \delta (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right) \right\} \frac{1}{l_2 \cos^3 \delta} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{c}{d} (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \right\} \{ \operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma \} \left\{ 1 + \beta \frac{l_2}{d} \sin \delta (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) \right\} \frac{1}{d} \right]. \dots (27)$$

Ist $\beta = 0$, oder wenigstens so klein, dass man es vernachlässigen darf, und sind ausserdem noch die Drahtlängen einander gleich, also $l_1 = l_2 = l$, so ergibt sich

$$N = \epsilon P \left[\frac{1}{l} \left\{ \left(1 + \frac{m}{d} \right) \frac{1}{\cos^3 \gamma} + \frac{m}{d} \cdot \frac{1}{\cos^3 \delta} \right\} + \frac{1}{d} \left\{ \frac{c}{d} (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma) - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \right\} \{ \operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \gamma \} \right]. \dots (28)$$

Die Winkel γ und δ sind gewöhnlich klein, folglich kann man folgende Näherungsformel für den Druck auf den Stützstift aufstellen:

$$N = \frac{\epsilon}{l} P \left[1 + 2 \frac{m}{d} \right]. \dots (29)$$

Wollen wir nun die Formeln (28) und (29) auf einen concreten Fall anwenden.

Bei dem mir zur Verfügung stehenden Zöllner'schen Horizontalpendel war

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 = l = 527 \text{ m/m} \\ d &= 170 \text{ m/m} \\ m &= 122 \text{ m/m} \\ c &= 37 \text{ m/m}. \end{aligned}$$

Das Pendel wurde auf eine totale (doppelte) Periode T von 25 Sec. eingestellt und zwar so, dass $\beta = 0$ war (bei Abwesenheit der Spitze).

Ist $\beta = 0$, so ergibt sich aus der Formel (15)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m}{m+d} \operatorname{tg} \delta. \dots (30)$$

Was nun die Neigung i der Drehungsaxe des vollständig freien Pendels anbelangt, so lässt sich dieselbe aus der bekannten Formel

$$i = \frac{L}{g} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

berechnen, wo L die reducierte Pendellänge und g die Beschleunigung der Schwere bedeutet.

L war ungefähr gleich 173 m/m ; daraus folgt

$$i = 3,8.$$

Zur Berechnung der Winkel γ und δ dienen die Formeln (30), (11) und (10).¹⁾

Man erhält daraus

$$\gamma = 5^\circ 30'$$

$$\delta = 12^\circ 58'$$

und ausserdem

$$h = 1038 \text{ m/m}.$$

Setzt man nun die entsprechenden Zahlenwerthe in die Formel (28) ein, so ergibt sich

$$N = 0,00478 \epsilon P,$$

wo ϵ in Millimetern ausgedrückt sein soll.

Die angenäherte Formel (29) hätte geliefert

$$N = 0,00462 \epsilon \cdot P,$$

was sich recht wenig von dem genaueren Ausdruck unterscheidet.

Das Gewicht des Zöllner'schen Pendels war sehr bedeutend; es war nämlich

$$P = 14430 \text{ Gr.},$$

¹⁾ $\beta = 0$.

also etwa 3,8 Mal schwerer, als das Gewicht des Bosch'schen Pendels und trotzdem ist der Druck N auf die stützende Spitze, selbst für eine Verschiebung ϵ von 3 mm , was für praktische Zwecke ganz ausreichend ist, nur gleich 207 Gr.

Wäre $\epsilon = 1 \text{ mm}$, so würde sich N zu 69 Gr. ergeben. Der Druck auf die Spitze ist also, selbst bei einem so bedeutenden Pendelgewicht, ein ganz geringer.

Wären die Gewichte beider Pendel einander gleich, so würde der Druck auf die stützende Spitze beim Zöllner'schen Pendel für $\epsilon = 3 \text{ mm}$ 40,5 und für $\epsilon = 1 \text{ mm}$ 122 Mal kleiner, als bei dem Bosch'schen Pendel sein.

Wir sehen also, dass ein so abgeändertes Zöllner'sches Pendel bei einem sehr geringen Druck auf die Stützs Spitze die Vortheile des Bosch'schen Pendels besitzt, nämlich, dass bei ihm die Längsschwingungen in der Richtung des Pendelarms total vermieden werden.

Obgleich diese Ueberlegungen über die Vortheile eines in der eben erwähnten Weise abgeänderten Zöllner'schen Horizontalpendels sich in der That sehr gut bewährt haben, wie wir es weiter unten sehen werden,

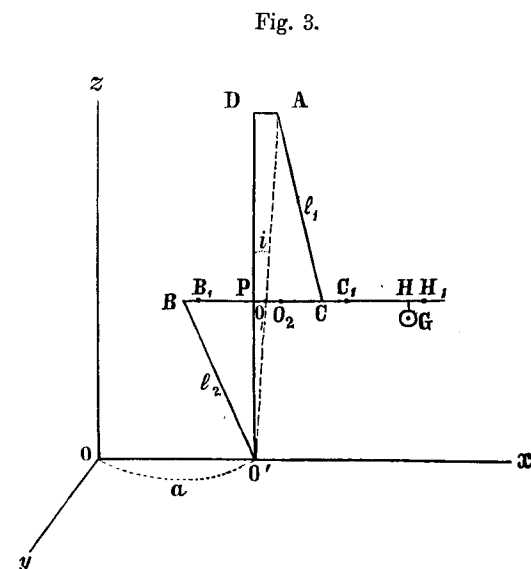


Fig. 3.

so ist man doch bei einer näheren Betrachtung dieses Apparates gezwungen zuzugestehen, dass vom rein mechanischen Standpunkt aus dieses System höchst unvollkommen ist.

In der That, nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem (xyz) an (siehe die Fig. 3), und sei das Pendel BH , der Einfachheit wegen, so aufgestellt, dass der Winkel $\beta = 0$ ist.

Bei normaler Lage des Pendels, d. h. bei Abwesenheit der Stützs Spitze, befinde sich das Pendel in der Lage BH .

Bringt man nun die erwähnte Spitze in Anwendung, so verschiebt sich der Punkt O_1 nach O_2 , wo $O_1 O_2 = \epsilon$ sehr klein ist. Dabei verschieben sich um denselben Betrag B nach B_1 , C nach C_1 und H nach H_1 .¹⁾

¹⁾ Wenn ϵ sehr klein ist, können wir immer in erster Annäherung annehmen, dass $\beta = 0$ bleibt, oder, was besser ist, um streng zu verfahren, wollen wir annehmen, dass der Pendelarm, wenn er schon verschoben ist, horizontal steht.

Nun aber hat jetzt unser bewegliches System drei feste Punkte A , O_2 und O' ; es existiert also keine mögliche Drehungsaxe und wäre das System in der That vollständig starr, so würde keine Drehung des Apparats möglich sein.

In der That aber schwingt der Apparat wie ein gewöhnliches freies Horizontalpendel. Dies wird dadurch ermöglicht, dass die Drähte l_1 und l_2 eine gewisse Elasticität besitzen und sich bei der Drehung des Apparates etwas ausdehnen. Wären l_1 und l_2 streng constant, so würde der Apparat sich überhaupt nicht drehen können.

Dies lässt sich folgendermaassen beweisen.

Führen wir dazu folgende Bezeichnungen ein:

$$O_1 C = O_2 C_1 = d_1$$

$$O_1 B = O_2 B_1 = d_2$$

$$OO' = a$$

$$PO_1 = \alpha$$

$$O'D = h$$

$$O'P = b$$

$$\angle DO'A = i.$$

Die Coordinaten des Punktes C_1 seien, wenn der Pendelarm in der (zx) -Ebene sich befindet, resp.

$$x_1, y_1, z_1,$$

und wenn derselbe gedreht ist

$$x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1, z_1 + \zeta_1.$$

Die entsprechenden Coordinaten für den Punkt B_1 seien

$$x_2, y_2, z_2,$$

$$x_2 + \xi_2, y_2 + \eta_2, z_2 + \zeta_2.$$

Es ergibt sich dann aus der Figur

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a + \alpha + d_1 + \varepsilon \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= b \\ x_2 &= a + \alpha - d_2 + \varepsilon \\ y_2 &= 0 \\ z_2 &= b. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

Bezeichnen wir noch $a + ih$ mit c , dann wird

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - c)^2 + (b - h)^2 &= l_1^2 \\ (x_2 - a)^2 + b^2 &= l_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

und im allgemeinen Fall, wenn das Pendel gedreht ist,

$$\begin{aligned} (x_1 + \xi_1 - c)^2 + \eta_1^2 + (b + \zeta_1 - h)^2 &= l_1^2 \\ (x_2 + \xi_2 - a)^2 + \eta_2^2 + (b + \zeta_2)^2 &= l_2^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, mit Rücksicht auf die vorigen Gleichungen (32),

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^2 + 2(x_1 - c)\xi_1 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + 2(b - h)\zeta_1 &= 0 \\ \xi_2^2 + 2(x_2 - a)\xi_2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 + 2b\zeta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

Bezeichnen wir noch die Coordinaten des Punktes O_2 mit x_0, y_0 und z_0 , wo

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a + \alpha + \varepsilon \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

wird.

Die Entfernung zwischen C_1 und O_2 , so wie zwischen B_1 und O_2 , muss unverändert bleiben.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (x_1 + \xi_1 - x_0)^2 + \eta_1^2 + (z_1 + \zeta_1 - z_0)^2 &= d_1^2 \\ (x_2 + \xi_2 - x_0)^2 + \eta_2^2 + (z_2 + \zeta_2 - z_0)^2 &= d_2^2, \end{aligned}$$

oder, wegen der Beziehungen (31) und (34),

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^2 + 2d_1\xi_1 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 &= 0 \\ \xi_2^2 + 2d_2\xi_2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

Nun ist leicht einzusehen, dass, wenn η_1 und η_2 sehr klein sind, ξ_1 und ξ_2 , so wie ζ_1 und ζ_2 bei der Drehung des Pendels kleine Grössen höherer Ordnung werden.

Begnügt man sich mit den Grössen zweiter Ordnung, so lassen sich die Gleichungen (35) folgendermaassen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1^2 &= -2d_1\xi_1^1) \\ \eta_2^2 &= +2d_2\xi_2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

Setzt man nun die Werthe von η_1^2 und η_2^2 aus den Gleichungen (36) in die Gleichungen (33) ein, so folgt, wiederum bis auf Glieder höherer Ordnung,

$$\begin{aligned} \{x_1 - c - d_1\}\xi_1 + (b - h)\zeta_1 &= 0 \\ \{x_2 - a + d_2\}\xi_2 + b\zeta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin x_1 und x_2 durch ihre Werthe aus den Gleichungen (31) und berücksichtigt noch dabei, dass $c = a + ih$ und $\alpha = ib$ ist, so ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{i - \frac{\varepsilon}{h-b}}{i + \frac{\varepsilon}{b}} \cdot \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

oder, wegen der Beziehungen (36),

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{i - \frac{\varepsilon}{h-b}}{i + \frac{\varepsilon}{b}} \cdot \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} \dots\dots\dots (37)$$

Es muss noch die Bedingung ausgedrückt werden, dass die drei Punkte C_1, O_2 und B_1 auf einer und derselben Geraden liegen.

Diese Bedingung liefert die Beziehungen

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = -\frac{d_1}{d_2} \dots\dots\dots (38)$$

und

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{d_1}{d_2} \dots\dots\dots (39)$$

¹⁾ Bei der Drehung des Pendels wird ξ_1 immer negativ und ξ_2 positiv sein.

Bringt man nun den Ausdruck für das Verhältniss $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ aus der Gleichung (39) in die Gleichung (37), so ergibt sich

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = -\frac{d_1}{d_2} \sqrt{\frac{i + \frac{\varepsilon}{b}}{i - \frac{\varepsilon}{h-b}}} \dots\dots\dots (40)$$

Wir erhalten also für das Verhältniss $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ zwei Ausdrücke, nämlich die Formeln (38) und (40).

Dieselben können zugleich nur in dem Fall bestehen, wenn η_1 und η_2 gleich Null sind (Ruhelage), oder wenn $\varepsilon = 0$ wird.

Ist aber ε von 0 verschieden, so kann bei einem absolut starren System überhaupt keine Drehung stattfinden.

In Wirklichkeit lässt sich das Pendel aber, wegen einer gewissen Elasticität des Systems, doch in Schwingungen versetzen.

Es wäre aber sehr zu befürchten, dass ein so unterstütztes und aus seiner normalen Ruhelage verschobenes Zöllner'sches Horizontalpendel bei Schwingungen sehr viel von seiner Empfindlichkeit als seismometrischer Apparat einbüßen wird.

Um diese Frage aufzuklären sind nun folgende Versuche gemacht worden.

Das mir zur Verfügung stehende schwere Zöllner'sche Horizontalpendel wurde mit der früher erwähnten Stützvorrichtung versehen und auf meiner Untersuchungsplattform, die in einem meiner früheren Aufsätze ausführlich beschrieben ist¹⁾, über der Drehungsaxe derselben aufgestellt.

In der Nähe der Drehungsaxe des Pendels wurde auf dem Pendelarm selbst ein kleiner Spiegel befestigt, welcher gestattete, mittelst Fernrohr und Scala die Bewegung des Pendels zu verfolgen. Die Ausschläge des Pendels waren bei diesen Versuchen immer verhältnissmässig klein, folglich musste man die Entfernung zwischen Spiegel und Scala gross wählen. Diese Entfernung D betrug 6250 mm.

Um das Pendel in ein aperiodisches Instrument zu verwandeln, wurde dasselbe mit einer dämpfenden Kupferplatte versehen, und ausserdem noch mit einer kleinen Spule, die mit einem aperiodischen Galvanometer verbunden war, zum Zweck der electromagnetischen Registrierung der Pendelbewegungen, welche Art der Registrierung eine viel grössere Empfindlichkeit

¹⁾ «Ueber seismometrische Beobachtungen.» Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. Livraison 1. § 10. p. 162 (1902).

zulässt.¹⁾ Die Kupferplatte und die Spule ragten theilweise in das magnetische Feld je eines besonderen Electromagneten hinein. Die Bewegung der Galvanometerspule wurde ebenfalls mittelst eines besonderen Fernrohrs und Scala verfolgt. Die Entfernung D_1 des Galvanometerspiegels von der entsprechenden Scala wurde gleich 1220 mm genommen.

Um das Pendel in periodische Schwingungen zu versetzen, konnte man dasselbe nicht aus seiner Ruhelage entfernen und dann sich selbst überlassen, da es, durch Vermehrung der Stromstärke in dem zur Dämpfung dienenden Electromagnet, in ein aperiodisches Instrument verwandelt wurde; man konnte zu diesem Zweck auch nicht die Plattform in Bewegung versetzen, da die Ausschläge des Pendels, wegen seiner grossen Empfindlichkeit, zu gross geworden wären.

Das Versetzen des Pendels in Schwingungen geschah daher auf folgende Weise. Es wurde auf den Rand der Plattform ein Gewicht in einem bestimmten Rythmus aufgelegt und dann weggenommen. Um dies möglichst regulär ausführen zu können, wurde dazu ein Metronom benutzt, das jede Secunde einen Schlag gab. Man verfuhr dabei folgendermaassen. Bei einem gewissen Metronomschlag wurde das Gewicht sanft auf die Plattform niedergelegt und dasselbe z. B. 8 Secunden auf derselben gelassen. Nach Verlauf dieser 8 Secunden wurde das Gewicht für weitere 8 Secunden weggenommen und nach Verlauf derselben wieder auf die Plattform gelegt u. s. w. Dabei versuchte man die Periode des Auflegens und Abhebens des Gewichts ungefähr gleich der Periode des ungedämpften Pendels zu machen.

Durch dieses periodische Auflegen und Abnehmen des Gewichtes gerieth das Pendel in ziemlich regelmässige Schwingungen.

Nun habe ich in meinem Aufsatz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen»²⁾ theoretisch und experimentell bewiesen, dass, wenn ein Pendel harmonische Schwingungen ausführt, die Galvanometerspule dieselbe Bewegung befolgt und zwar mit genau derselben Periode. Bei diesen Beobachtungen wurde demnach die totale Periode der Pendelbewegung oder, was auf dasselbe herauskommt, die Periode des regelmässigen Auflegens und Abhebens des Gewichtes, mit Hilfe eines Löbner'schen Secundenzählers nach dem Galvanometer bestimmt.

Diese Periode möge T_2 heissen.

¹⁾ Man sehe meinen Aufsatz: «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen.» Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. I. Livraison 3 (1904).

²⁾ L. c. §§ 6 und 17.

Die Stromstärke i_1 im Electromagnet bei der Registrierspule wurde immer constant gehalten, um ein constantes Vergrößerungsverhältniss der Ausschläge des Pendels und des Galvanometers zu haben, und zwar war $i_1 = 0,44$ Amp.

Was nun die Stromstärke i beim anderen Electromagnet für die dämpfende Kupferplatte anbelangt, so wurde i für jede Lage des Stützstiftes so gewählt, dass das Pendel sich genau an der Grenze der Aperiodicität befand.

Diese Bedingung fordert die Gleichheit der Constanten ϵ und n in der Differentialgleichung der Bewegung des freien Horizontalpendels

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta = 0,$$

wo θ der Winkelausschlag des Pendels, ϵ die Dämpfungsconstante und $n = \frac{2\pi}{T}$ ist, wobei T die Eigenperiode des ungedämpften Pendels bedeutet.

Bei diesen Beobachtungen variierte i zwischen 0,54 und 0,70 Amp.

Die Beobachtungen selber geschahen auf folgende Weise.

Zuerst wurde der Stützstift weit weggeschraubt und die Periode T des ganz freien und ungedämpften Pendels bestimmt.

Alsdann wurde durch Auswählen der passenden Stromstärke i das Pendel genau an die Grenze der Aperiodicität gebracht. Nun wurde das Gewicht periodisch auf die Plattform aufgelegt und von derselben fortgenommen. Dabei gerieth das Pendel in ziemlich regelmässige Schwingungen und es wurden die totalen Amplituden der Ausschläge, d. h. die Differenzen der Ausschläge rechts und links, beim Pendel und Galvanometer an den zugehörigen Scalen notiert und aus den erhaltenen Zahlen die entsprechenden Mittelwerthe genommen. Es sei nun m der Mittelwerth der ganzen Ausschläge beim Pendel und m_1 der entsprechende Werth beim Galvanometer.

Die totale Periode T_2 der Pendelbewegung in diesem Fall wurde, wie früher gesagt, nach dem Galvanometer bestimmt.¹⁾

Dann wurde der Stift mit der Platte in Berührung gebracht ($\epsilon = 0$), abermals die Periode T des ungedämpften Pendels bestimmt und darauf dieselben Schwingungsbeobachtungen mit dem wiederum aperiodisch gemachten Pendel wiederholt.

Nachher wurde der Stift um 1, 2, 3, 4 und 5 Schraubenhöhen verschoben (freilich nicht in dieser Reihenfolge) und in jeder Lage des Stiftes dieselben Beobachtungen vorgenommen, d. h. T , T_2 , m und m_1 notiert.

¹⁾ Die Galvanometerbewegung ist viel ausgeprägter, folglich lässt sie eine viel genauere Bestimmung der Periode zu.

Der Stift war so eingerichtet, dass beim Drehen der Schraube der Pendelarm sich nicht vorwärts, sondern rückwärts bewegte, d. h. in der Richtung von C nach P (siehe die Fig. 2); die Schraubenhöhe betrug dabei $0,75 \frac{m}{m}$.

Das gleichmässige Auflegen und Abnehmen des Gewichtes konnte nie vollständig genau erzielt werden, und folglich wiesen die Amplituden der Pendel- und Galvanometerbewegungen gewisse Schwankungen auf; durch Vermehrung der Anzahl der einzelnen Bestimmungen konnte man aber zuverlässige Mittelwerthe bekommen.

Die Resultate dieser Bestimmungen sind nun in der folgenden Tabelle I zusammengestellt, wobei zu bemerken ist, dass an den Ausschlägen des Galvanometers m_1 , die immer ziemlich gross ausfielen, die bekannten Correctionen angebracht wurden, um Grössen zu erhalten, die wirklich den Winkelausschlägen des Galvanometers proportional sind.

Tabelle I.

Verschiebung ϵ	m	m_1	T	T_2
Stift ganz entfernt.	9,15 $\frac{m}{m}$	674 $\frac{m}{m}$	17,31	16,04
0	8,35	633	16,82	16,20
0,75 $\frac{m}{m}$	8,73	661	16,43	16,21
1,50	7,49	560	15,75	16,16
2,25	7,83	591	15,85	16,18
3,00	6,86	520	14,38	16,02
3,75	6,85	523	15,52	16,23

Nach diesen Werthen von m und m_1 kann man noch kein richtiges Urtheil bekommen, in wie weit die Empfindlichkeit des Pendels von der Verschiebung ϵ des Stützstiftes abhängig ist, weil die Perioden T und T_2 bei diesen Beobachtungen nicht immer genau dieselben waren; da aber die Ausschläge des Pendels und des Galvanometers m und m_1 von diesen Perioden abhängen, so muss man, um wirklich vergleichbare Werthe zu bekommen, die beobachteten Ausschläge m und m_1 auf bestimmte feste Perioden reducieren.

Für diese Perioden habe ich die folgenden gewählt:

$$(T) = 16,00$$

und

$$(T_2) = 16,00.$$

Die auf diese Perioden reducierten Ausschläge seien durch (m) und (m_1) bezeichnet.

Diese Werthe werden schon mit einander vergleichbar sein und können deutlich angeben, um wie viel die Empfindlichkeit des Horizontalpendels durch die Einführung des stützenden Stiftes beeinträchtigt wird.

Diese Reduction geschah nun auf folgende Weise.

Durch das periodische Auflegen und Abnehmen des Gewichtes erfährt die Plattform periodische, wenn auch minimale Neigungen. Diese Neigungen setzen das Pendel und das Galvanometer in periodische Bewegung, die mit Hilfe der Fernrohre und Scalen direct beobachtet wurden.

Bedeutet nun ψ die Neigung der Plattform zu einem bestimmten Zeitmoment t , so kann man wohl annehmen, dass ψ zwischen zwei Grenzwerten ψ_1 und ψ_2 periodisch schwankt, und zwar nach dem Gesetz

$$\psi = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1) \sin(n_2 t + \delta_2). \dots\dots\dots(41)$$

Bedeutet T_2 die Periode dieser Bewegung, so wird

$$n_2 = \frac{2\pi}{T_2} \dots\dots\dots(42)$$

sein.

δ_2 ist eine gewisse Constante.

Die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels wird in diesem Falle folgende Form annehmen¹⁾:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{s}{l}\psi'' - \frac{g}{l}\psi = 0. \dots\dots\dots(43)$$

Ist die Periode der Eigenbewegung des ungedämpften Pendels T , so ist

$$n = \frac{2\pi}{T}. \dots\dots\dots(44)$$

s bedeutet die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes des Pendels von der Drehungsaxe der Plattform, l die reducierte Länge des Pendels und g die Beschleunigung der Schwere.

Ist $\varepsilon > n$, so ist das allgemeine Integral dieser Gleichung für nicht zu kleine Werthe von t , wenn das Glied, welches die zwei Integrationsconstanten enthält und mit dem Factor $e^{-\varepsilon t}$ multipliciert ist, als verschwindend klein angenommen werden darf, gleich:

$$\theta = \frac{g\psi_1}{n^2 l} + \frac{s n_2^2 + g}{l} \cdot (\psi_2 - \psi_1) \frac{1}{\sqrt{R_2}} \sin(n_2 t + \delta_2 - \Delta_2). \dots\dots(45)$$

¹⁾ Siehe Formel (3) in meinem Aufsatz «Ueber die Methoden zur Beobachtung von Neigungswellen». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. 2. § 2 (1905).

Hierin bedeutet Δ_2 eine gewisse Constante und R_2 wird durch die folgende Formel gegeben¹⁾:

$$R_2 = (n^2 - n_2^2)^2 + 4\varepsilon n_2^2.$$

Die totale Amplitude $\Delta\theta$ des Winkelausschlages des Pendels ergibt sich also gleich

$$\Delta\theta = 2 \frac{s n_2^2 + g}{l} (\psi_2 - \psi_1) \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

Ist das Pendel so aufgestellt, dass es gerade an der Grenze der Aperiodicität sich befindet, so wird $\varepsilon = n$ sein, und wir erhalten

$$\Delta\theta = 2 \frac{s n_2^2 + g}{n_2^2 + n^2} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{l}. \dots\dots\dots(46)$$

Bei meinen Beobachtungen war $s = 80$ Cm.

Wenden wir uns jetzt der Bewegung des Galvanometers zu.

Der Winkelausschlag desselben muss bekanntlich²⁾ folgender Differentialgleichung genügen:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0. \dots\dots\dots(47)$$

k ist eine gewisse Constante, ε_1 die Dämpfungsconstante des Galvanometers und

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \dots\dots\dots(48)$$

wo T_1 die Eigenperiode des ungedämpften Galvanometers bedeutet.

Ist $\varepsilon_1 > n_1$, so ergibt sich für das Integral der Differentialgleichung (47), wiederum für nicht zu kleine Werthe von t und bei Zugrundelegung der Gleichung (45) für θ ($\varepsilon = n$), folgender Ausdruck:

$$\varphi = -k \frac{s n_2^2 + g}{n_2^2 + n^2} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{l} \cdot \frac{n_2}{\sqrt{R_1}} \sin(n_2 t + \delta_2 - \Delta_2 - \Delta_1). \dots(49)$$

Hierin bedeutet Δ_1 eine gewisse Constante und R_1 wird durch die folgende Formel gegeben:

$$R_1 = (n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\varepsilon_1^2 n_2^2.$$

¹⁾ Siehe die Formel (16) meines eben citierten Aufsatzes.

²⁾ Siehe meinen Aufsatz «Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen». L. c. § 6 Formel (62).

Die totale Amplitude $\Delta\varphi$ des Winkelausschlages des Galvanometers (unabhängig vom Vorzeichen) wird also gleich

$$\Delta\varphi = 2k \frac{sn_2^2 + g}{n_2^2 + n^2} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{l} \cdot \frac{n_2}{\sqrt{R_1}}.$$

Nun war das Galvanometer durch passende Auswahl der äusseren Widerstände so reguliert, dass es sich gerade an der Grenze der Aperiodicität befand.

Dann wird $\varepsilon_1 = n_1$ und wir bekommen

$$\Delta\varphi = 2k \frac{sn_2^2 + g}{n_2^2 + n^2} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{l} \cdot \frac{n_2}{n_2^2 + n_1^2} \dots \dots \dots (50)$$

Beim Galvanometer war $T_1 = 17,12$, also $n_1 = 0,3670$.

Führen wir in die Formeln (46) und (50) die Perioden aus den Gleichungen (42), (44) und (48) ein, so ergeben sich für die Ausschläge an den entsprechenden Scalen folgende Ausdrücke:

$$m = \left\{ \frac{D}{\pi^2} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{l} \right\} \left[T^2 \frac{4\pi^2 s + gT_2^2}{T^2 + T_2^2} \right] \dots \dots \dots (51)$$

$$m_1 = \left\{ \frac{k}{2} \cdot \frac{D_1}{\pi^3} \cdot \frac{\psi_2 - \psi_1}{l} \cdot T_1^2 \right\} \left[T^2 \frac{4\pi^2 s + gT_2^2}{T^2 + T_2^2} \right] \left(\frac{T_2}{T_1^2 + T_2^2} \right) \dots \dots (52)$$

Wir sehen also, dass die Ausschläge beim Pendel und Galvanometer von den Perioden T und T_2 abhängig sind.

Um diese Ausschläge auf die constanten Perioden $(T) = (T_2) = 16,00$ zu reducieren, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$T^2 \frac{4\pi^2 s + gT_2^2}{T^2 + T_2^2} = A$$

$$(T)^2 \frac{4\pi^2 s + g(T_2)^2}{(T)^2 + (T_2)^2} = A_0$$

$$\frac{T_2}{T_1^2 + T_2^2} = B$$

$$\frac{(T_2)}{T_1^2 + (T_2)^2} = B_0,$$

dann erhält man für die auf die constanten Perioden reducierten Ausschläge folgende Ausdrücke:

$$(m) = m \frac{A_0}{A} \dots \dots \dots (53)$$

$$(m_1) = m_1 \frac{A_0}{A} \cdot \frac{B_0}{B} \dots \dots \dots (54)$$

und das Vergrösserungsverhältniss μ der Winkelausschläge am Galvanometer und am Pendel wird gleich

$$\mu = \frac{(m_1)}{(m)} \cdot \frac{D}{D_1} \dots \dots \dots (55)$$

Die nach den Zahlenwerthen der Tabelle I und den Formeln (53) und (54) berechneten Werthe von (m) und (m_1) für verschiedene Stellungen des Stiftes sind nun in der folgenden Tabelle II zusammengestellt, wobei diese Werthe auf zwei Ziffern abgerundet sind. In der vierten Colonne befindet sich das Verhältniss der Ausschläge an den Scalen $\frac{(m_1)}{(m)}$.

Tabelle II.

Verschiebung ε	(m)	$(m_1) \cdot 10^{-2}$	$\frac{(m_1)}{(m)}$
Stift ganz entfernt.	8,5	6,2	73
0	7,9	5,9	75
0,75 $\frac{m}{m}$	8,4	6,3	75
1,50	7,5	5,6	75
2,25	7,8	5,9	76
3,00	7,7	5,8	75
3,75	7,0	5,3	76
Im Mittel			75,0

Die Zahlen dieser Tabelle lassen sofort erkennen, dass bis $\varepsilon = 3 \frac{m}{m}$ die Empfindlichkeit des Horizontalpendels ziemlich constant bleibt. Die kleinen Schwankungen in den Werthen von (m) und (m_1) erklären sich wohl durch Versuchsfehler, da es praktisch äusserst schwierig ist durch das Auflegen und Abnehmen des Gewichtes das Pendel unter genau denselben Bedingungen in Bewegung zu versetzen und zu erhalten. Für $\varepsilon = 3,75 \frac{m}{m}$ scheint die Empfindlichkeit ein wenig kleiner zu sein, aber bis zu $\varepsilon = 3,00 \frac{m}{m}$ kann man wohl die Empfindlichkeit des Pendels praktisch als unveränderlich betrachten.

Was nun das Verhältniss $\frac{(m_1)}{(m)}$ anbelangt, so behält dasselbe in allen Fällen fast denselben Werth.

Aus dem Mittelwerth 75,0 lässt sich nach der Formel (55) das Vergrösserungsverhältniss in diesem Falle berechnen.

Es wird nämlich

$$\mu = 384.$$

Wir sehen also, dass durch die Einführung des früher erwähnten Stützstiftes die Empfindlichkeit des Horizontalpendels, selbst für Verschiebungen bis $\epsilon = 3,0 \text{ }^m/m$, was praktisch ganz ausreichend ist, fast gar keine Aenderung erfährt, und da durch diese Vorrichtung, bei einem ganz leisen Druck auf die Stützspitze, die Längsschwingungen des Pendels ganz eliminiert sind, so ist man wohl berechtigt diese vorgeschlagene Abänderung des Zöllner'schen Pendels als eine zweckmässige zu bezeichnen.

Hätte aber für grössere Werthe von ϵ eine kleine Abnahme der Empfindlichkeit stattgefunden, so könnte man bei der electromagnetischen Registrirungsart diesen kleinen Uebelstand, durch eine passende Vermehrung der Stromstärke i_1 im entsprechenden Electromagnet, reichlich compensieren.

Um die Richtigkeit dieser Ueberlegungen nochmals zu prüfen, sind noch folgende Beobachtungen vorgenommen worden.

Das aperiodische Zöllner'sche Horizontalpendel mit electromagnetischer Registriervorrichtung wurde auf der ruhenden Untersuchungsplattform, welche sich im Grundstock des Gebäudes der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg befindet, aufgestellt und die Bewegung desselben mit Hilfe des aperiodischen Galvanometers während einer ganzen Nacht auf der Registriertrommel aufgeschrieben. Der Stützstift wurde dabei weit zurückgeschraubt.

Erdbeben finden in St. Petersburg äusserst selten statt, aber microseismische Unruhen werden wohl vorhanden sein; ausserdem kommen dazu noch die kleinen Erschütterungen von der Strassenbewegung, Windstösse u. s. w. Alle diese Erschütterungen sind allerdings äusserst klein, aber, wegen der ungeheueren Empfindlichkeit der galvanometrischen Registrirmethode, werden alle diese Bewegungen auf der Trommel aufgeschrieben.

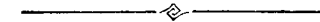
Das entsprechende Seismogramm ist in der Figur 4 abgebildet. Die meisten Bewegungen fanden abends statt, etwa bis 12 Uhr nachts. In der Nacht war es bedeutend ruhiger. Morgens früh fingen die kleinen Bewegungen wieder an.

Was auf diesem Seismogramm besonders interessant ist, ist die zackige Form der Curve, besonders in den Abendstunden. Die Zacken sind nämlich ungeheuer gross und ertheilen dem ganzen Seismogramm ein sehr sonderbares Aussehen. Die Verwerthung einer solchen gezackten Curve würde äusserst grosse Schwierigkeiten darbieten.

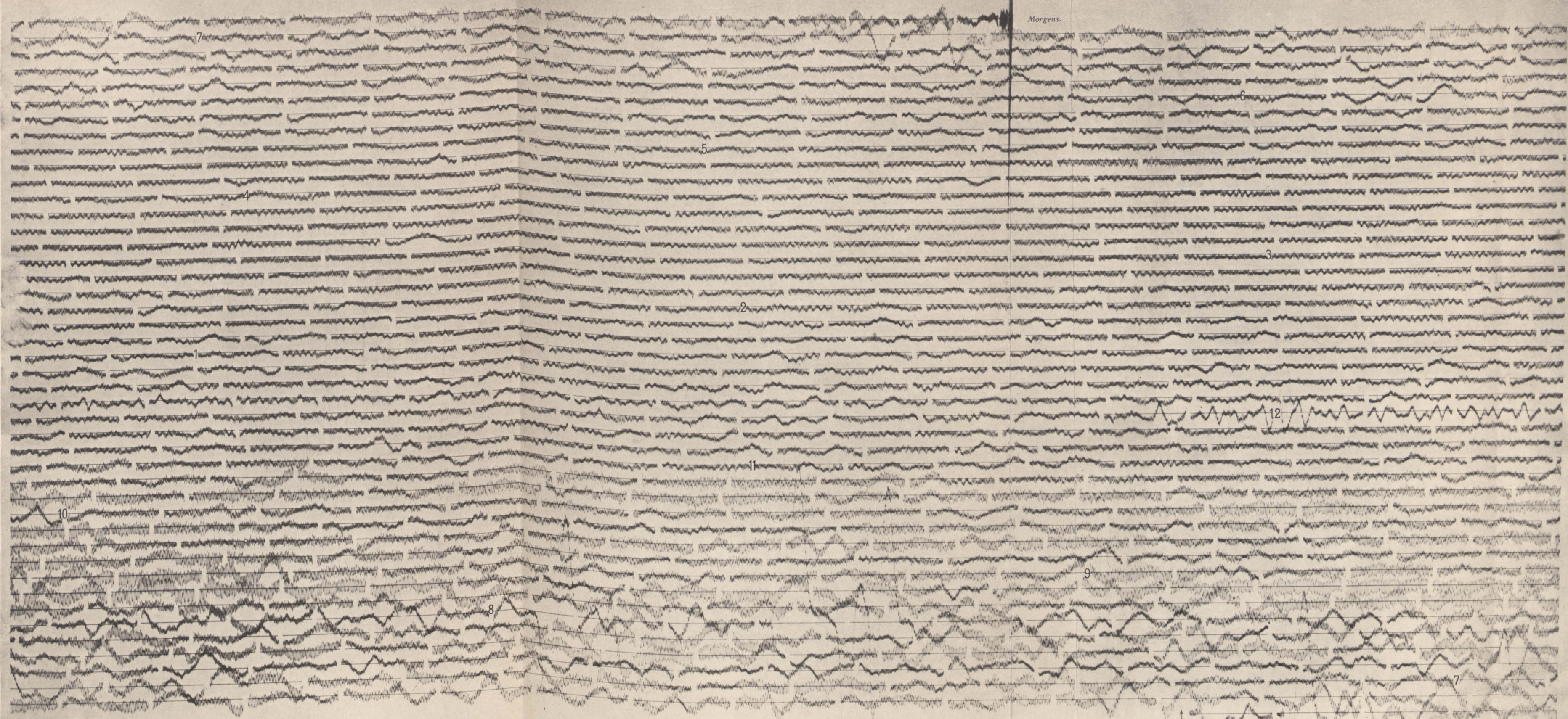
Nach Beendigung dieser Beobachtungen wurde nun der Stützstift in Anwendung gebracht und zwar um $\epsilon = 3,75 \text{ }^m/m$ verschoben und die Pendelbewegung wiederum mittelst des Galvanometers eine ganze Nacht registriert. Das entsprechende Seismogramm ist in der Fig. 5 abgebildet.

Ein Blick auf die erhaltene Curve lässt sofort erkennen, dass die früheren groben Zacken gänzlich verschwunden sind und die Curve einen bedeutend gleichmässigeren Verlauf hat. Wenn bei einer näheren, detaillierten Betrachtung der Curve unbedeutende Zacken sich dennoch erkennen lassen, so sind sie auch beim Bosch'schen Pendel vorhanden und haben ihre wahrscheinliche Ursache entweder in wirklichen äusserst kleinen Erschütterungen oder in minimalen Drehungen des Pendels um den Pendelarm als Drehungsaxe.

Auf jeden Fall lässt ein Vergleich der beiden Curven in den Figuren 4 und 5 ohne Zweifel sofort ersehen, wie vortheilhaft es in Wirklichkeit ist, ein Zöllner'sches Horizontalpendel mit der hier beschriebenen Stützvorrichtung zu versehen.



Morgens.



Abends.

6 h. 25 m.



Fig. 5.

